Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es seien $L \supseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung und p eine Primzahl, die den Körpergrad $[L : K]$ teilt.

a) Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper $K \subseteq Z \subseteq L$ gibt, so dass

$$[L : Z] = p^m \quad \text{und} \quad p \nmid [Z : K]$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt. (8 Punkte)

b) Bestimmen Sie im Fall $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_7)$ mit einer primitiven siebten Einheitswurzel ζ_7 und $p = 3$ einen solchen Zwischenkörper, indem Sie ein primitives Element α dafür angeben.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Betrachten Sie die Teilmenge

$$\mathfrak{p}R[X] := \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i f_i(X) \;\middle|\; r \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathfrak{p} \text{ und } f_i(X) \in R[X] \right\}$$

im Polynomring $R[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Ideal von $R[X]$ ist. (2 Punkte)

b) Geben Sie einen Isomorphismus $R[X]/\mathfrak{p}R[X] \to (R/\mathfrak{p})[X]$ an (mit Beweis).

(6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Primideal, aber kein maximales Ideal von $R[X]$ ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, und es seien $\alpha, \beta \in L$, so dass $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ beide algebraisch über K sind.

Zeigen Sie, dass dann auch α und β algebraisch über K sind. (10 Punkte)

Aufgabe 4:

Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf der endlichen Menge $X \neq \emptyset$, so dass jedes $g \in G$ mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie:

a) Es bezeichne G_x den Stabilisator von x in G. Dann gilt

$$G \setminus \{1\} = \bigcup_{x \in X} (G_x \setminus \{1\}).$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass X nur ein Element hat. (9 Punkte)

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch n den Rest n-1 hat, für alle $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. (8 Punkte)